4. Übungsblatt zur Vorlesung Theoretische Physik II (Elektrodynamik)

Abgabe der Lösungen: in den Übungen am 16.5.07

Aufgabe 1: (1+2+3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden Ladungsverteilungen jeweils nur ein nichtverschwindendes Multipolmoment besitzen, und geben Sie dieses an.

a) $\rho(\vec{r}) = q_0 \delta(\vec{r})$

b) $\rho(\vec{r}) = -\vec{p}_0 \cdot \nabla \delta(\vec{r})$

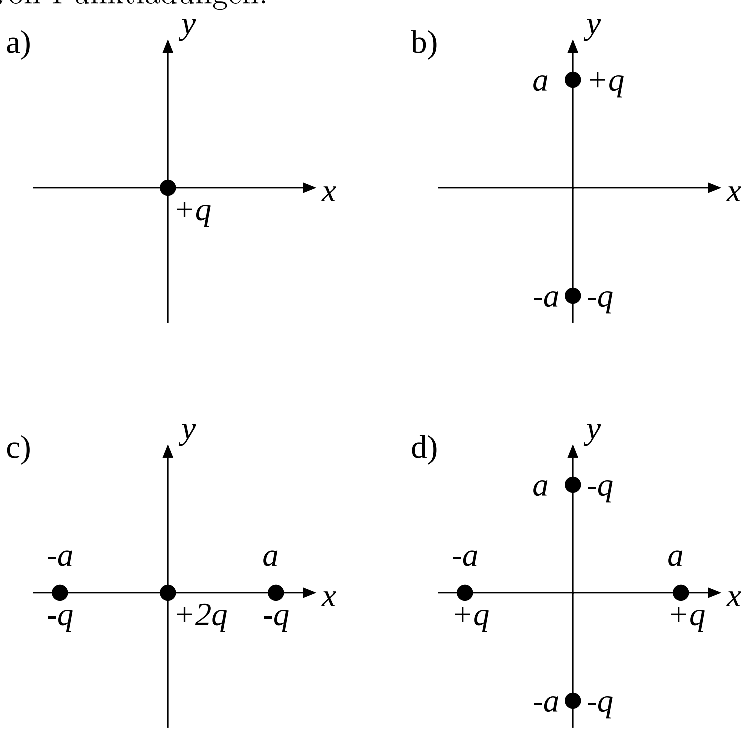
c) $\rho(\vec{r}) = \frac{1}{2} q_{ij} \partial_i \partial_j \delta(\vec{r})$.

Hierbei sind Ableitungen der δ-Funktion über partielle Integrationen definiert, z.B.

$$\int d^3r \; f(\vec{r}) \, \partial_i \delta(\vec{r}) = - \int d^3r \; \partial_i f(\vec{r}) \, \delta(\vec{r})$$

Aufgabe 2: (1+1+2+2 Punkte)

Berechnen Sie die ersten Multipolmomente ($l = 0, 1, 2$) der folgenden Anordnungen von Punktladungen:



Aufgabe 3: (2+2 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass das Quadrupolmoment einer Ladungsverteilung genau dann invariant unter Verschiebungen ist, wenn die Gesamtladung und das Dipolmoment gleich null sind.

b) Das Quadrupolmoment einer Ladungsverteilung sei gegeben durch

$$Q_{ij} = q_0 \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie, wie sich Q_{ij} bei einer Drehung des Koordinatensystems um die z-Achse transformiert. Wie muss man den Winkel α dieser Drehung wählen, um Q_{ij} auf seine Hauptachsen zu transformieren, d.h. zu diagonalisieren?

Aufgabe 4: (2+2 Punkte)

Schlagen Sie die Kugelflächenfunktionen Y_{00}, Y_{1m} und Y_{2m} nach.

a) Rechnen Sie explizit nach, dass Y_{10}, Y_{11}, Y_{20} und Y_{21} normiert und orthogonal zueinander sind, d.h.

$$\int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \; Y^*_{lm}(\theta,\varphi) Y_{l'm'}(\theta,\varphi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}.$$

b) Die sphärischen Multipolmomente q_{lm} sind definiert durch

$$q_{lm} = \int d^3r \; \rho(\vec{r})\, r^l \; Y^*_{lm}(\theta,\varphi).$$

Drücken Sie q_{00}, q_{1m} und q_{21} durch die kartesischen Multipolkomponenten q, p_i und Q_{ij} aus.