6. Übungsblatt zur Vorlesung Theoretische Physik II (Elektrodynamik)

Abgabe der Lösungen: in den Übungen am 30.5.07

Aufgabe 1: Faradayscher Käfig (1 Punkt)

Zeigen Sie: Das Feld im Innern eines ladungsfreien Hohlraums, der von einem Leiter umschlossen ist, ist null (Faradayscher Käfig).

Aufgabe 2: Bildladungen (2+3 Punkte)

a) Gegeben seien zwei senkrecht zueinander stehende unendlich ausgedehnte leitende Platten. Die eine liegt in der (xz)-, die andere in der (yz)-Ebene (sie schneiden sich also entlang der z-Achse). Eine Punktladung q befindet sich an der Stelle $(a, b, 0)$. Bestimmen Sie das Potential im Viertelraum $\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 | x, y > 0\}$ mit der Methode der Bildladungen (deren Positionen Sie raten können).

b) Gegeben sei eine leitende Kugel mit Radius R. Im Abstand $a > R$ zum Kugelmittelpunkt befindet sich eine Punktladung q. Bestimmen Sie das Potential außerhalb der Kugel mit der Methode der Bildladungen (deren Position und Betrag Sie diesmal berechnen müssen).

Aufgabe 3: Kapazität (2+2 Punkte)

a) Berechnen Sie die Kapazität eines Kondensators, der aus zwei konzentrischen Zylindermänteln besteht, die in ein Dielektrikum eingebettet sind. Die Höhe h der Zylinder sei wesentlich größer als die beiden Radien R_1 und R_2, Sie können also Randeffekte an den Deckflächen vernachlässigen.

b) Vier Punktladungen q_1,..., q_4 werden im Vakuum auf die Eckpunkte eines Quadrats der Seitenlänge a gebracht. Die vier Ecken haben die Positionen $\vec{r}_1$,..., $\vec{r}_4$. Nehmen wir an, Sie kennen die Größen q_i nicht, sondern nur die Potentiale $\phi_i = \phi(\vec{r}_i)$, wobei die unendlichen "Selbstenergiebeiträge" jeweils abgezogen sind. Bestimmen Sie daraus die q_i.
Hinweis: Sie müssen dazu eine Matrix invertieren. Dies können Sie von Hand oder mit Hilfe eines Computerprogramms (z.B. Mathematica) machen.

Aufgabe 4: Dirichlet-Randwertproblem (2+2+2 Punkte)

Betrachten Sie einen Quader der Kantenlänge a, b, c, dessen "Bodenfläche" die (xy)-Ebene definiere. Es soll durch einen Separationsansatz folgendes Dirichlet-Problem der Laplace-Gleichung gelöst werden: Das Potential ϕ sei auf der "Deckfläche" $z = c$ durch eine vorgegebene Funktion $V(x, y)$ gegeben, auf den fünf anderen Randflächen sei $\phi = 0$.

a) Setzen Sie den Separationsansatz $\phi(x, y, z) = f(x)g(y)h(z)$ in $\Delta\phi = 0$ ein und bestimmen Sie noch ohne Berücksichtigung der Randbedingung die allgemeinste Form der erlaubten Funktionen f, g und h. (Diese muss jeweils zwei freie Integrationskonstanten und die Separationskonstanten enthalten!)

b) Bestimmen Sie nun alle Funktionen ϕ_{nm} vom Typ $f(x)g(y)h(z)$, die neben der Laplace-Gleichung auch $\phi = 0$ auf den fünf Randflächen erfüllen (aber noch nicht $\phi = V$ bei $z = c$). Zeigen Sie, dass sich diese Funktionen durch zwei Parameter $n, m \in \mathbb{N}$ charakterisieren lassen.

c) Wegen der Linearität der Differentialgleichung kann die Lösung des Dirichlet-Problems als $\phi(x, y, z) = \sum_{n,m} c_{nm}\phi_{nm}(x, y, z)$ angesetzt werden. Drücken Sie die Koeffizienten c_{nm} durch $V(x, y)$ aus.
Hinweis: Verwenden Sie die Orthogonalität der Sinusfunktionen,

$$\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}\,x\right)\sin\left(\frac{n'\pi}{a}\,x\right) = \frac{a}{2}\,\delta_{nn'}.$$

Aufgabe 5: Amperesches Gesetz (2+2 Punkte)

Bestimmen Sie das Magnetfeld, das von folgenden Stromverteilungen erzeugt wird:

a) ein Stromfaden entlang der z-Achse

$$\vec{j}(\vec{r}) = I_0\,\delta(x)\delta(y)\vec{e}_z,$$

b) eine um die z-Achse gaußförmig verteilte Stromdichte

$$\vec{j}(\vec{r}) = j_0\,\exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right)\vec{e}_z, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad R = \text{const.}$$